

## RECURRENCIAS LINEALES

- 1) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:
- $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 6, a_1 = 8.$
  - $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, a_1 = 1.$
  - $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 4, a_1 = 1.$
  - $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n \quad n \geq 0, \quad a_0 = 2, a_1 = 8.$
  - $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad n \geq 3, \quad a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15.$
  - $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad n \geq 2, \quad a_0 = 1, a_1 = 0.$
- 2) Sea  $a_n$  el número de palabras de longitud  $n$  formadas con los dígitos  $\{0, 1\}$ , que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular  $a_n$  y resuélvela.
- 3) Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir  $n$  escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.
- 4) Sean  $n$  rectas trazadas en el plano de manera que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada  $n \geq 0$ , sea  $a_n$  el nº de regiones en que las  $n$  rectas dividen al plano y sea  $b_n$  el número de regiones infinitas
- Encuentra una relación de recurrencia para calcular  $a_n$  y resuélvela.
  - Encuentra una relación de recurrencia para calcular  $b_n$  y resuélvela.
- 5) Problema de las Torres de Hanoi (Édouard Lucas): Se tienen  $n$  discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si  $a_n$  es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular  $a_n$  y resuélvela.
- 6) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:
- $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 7^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11, a_1 = 1, a_2 = -1 \end{cases}$
  - $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases}$
- 7) Sea  $M = \{A, B, C\}$  y sea  $S_n$  el conjunto de sucesiones de longitud  $n$ , formadas con las letras de  $M$ , en las que todas las cadenas de  $A$ -es son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular  $S_n$  y resuélvela.
- 8) Halla una ecuación de recurrencia que genere la siguiente sucesión:  $\{1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots\}$  y resuelve dicha ecuación, obteniendo en función de  $n$ , el término general  $A_n$  de la sucesión.
- 9) Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1, 2 y 4, y se quiere construir una torre de base  $4 \times 4$  apilando cubos, estando formada cada capa por cubos del mismo tamaño. Sea  $T_n$  el número de formas distintas de construir una torre de altura  $n$ . Encuentra una relación de recurrencia para hallar  $T_n$ .
- 10) Sea la matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$
- Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es  $D_n = \det A_n$  y resuélvela.